ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO

(Anno 1903-904)

SOPRA

UN PARTICOLARE SISTEMA DI PENDOLI

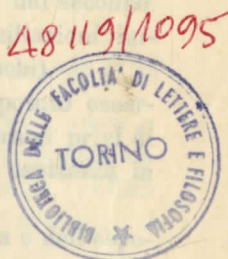
CHE RAPPRESENTA LE

MOLECOLE DEI CORPI COMPOSTI

NOTA

DI

ATTILIO FILIPPINI

(CON UNA TAVOLA)

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1904

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. XXXIX.
Adunanza del 17 Aprile 1904.

Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

Sommario. — 1. Origine della ricerca. — 2. Alcuni fenomeni secondarii. — 3. Proposta di una teoria. — 4. Calcolo della disposizione sperimentale. — 5. Caso nel quale il rapporto $\frac{m_2}{m_1}$ tende a zero. — 6. Caso di due pendoli uguali. — 7. Caso nel quale il rapporto $\frac{m_1}{m_2}$ tende a zero. — 8. Risultati sperimentali.

§ 1. **Origine della ricerca.** — Nel libro di *Lord Rayleigh* sul suono è citata, come esempio di un sistema a due oscillazioni (a due gradi di libertà), la coppia di pendoli soprapposti della fig. 1. Essendo la massa m_1 grandissima in confronto della massa m_2, si può ammettere, come prima approssimazione, che il primo pendolo non sia disturbato nel suo moto dal secondo.

Si sarebbe quindi nel caso classico delle oscillazioni impresse (*erzwungene Schwingungen* degli autori tedeschi).

Ma ripetendo l'esperienza di cui si tratta ho potuto osservare alcuni fenomeni secondarii, che non mi sembrano privi di interesse. Mi propongo di esaminarli con qualche esattezza in questa Nota.

Come vedremo, il risultato concorde della teoria e dell'esperienza si può esprimere dicendo che " *in meccanica come nel-* " *l'elettromagnetismo è impossibile ottenere l'unisono fra due sistemi* " *vibranti vicini* ", almeno se fra essi intercedono dei vincoli, che in qualche modo permettano la trasmissione del processo oscillatorio.

§ 2. **Alcuni fenomeni secondarii.** — Quando i pendoli *1* e *2* della fig. 1 hanno una piccola differenza di periodo si trova che le due masse non possono oscillare con continuità; ma anzi

l'ampiezza del moto di ciascuna va variando rapidamente nel tempo. Per modo che, ad intervalli regolari, ogni massa si riduce al riposo. Propriamente gli spostamenti di m_1 raggiungono il massimo valore quando m_2 si ferma, e viceversa.

Se la cosa, per quanto sembra, non fu ancora osservata, ciò dipende dal fatto che la migliore risonanza si ottiene, come è naturale, quando i due pendoli oscillano (separatamente) col medesimo ritmo, e il rapporto $\frac{m_2}{m_1}$ è piccolissimo. Ma in queste condizioni il fenomeno, del quale ci vogliamo occupare, si presenta ad intervalli assai lunghi.

Ora non è difficile rendersi conto della causa, che produce queste alternative di moto e di quiete.

Secondo la teoria classica delle oscillazioni impresse lo spostamento di ciascuna massa è dato infatti da una somma di due termini periodici, che variano col ritmo dei pendoli componenti. Ma la coesistenza di due oscillazioni poco diverse deve dare origine al fenomeno dei battimenti.

In realtà dimostreremo in seguito che sono battimenti quelli che si osservano, pure essendo il processo assai meno semplice di ciò che può ritenersi a prima vista.

In una esperienza da me fatta i pendoli avevano i periodi:

$$T_1 = 1'',40$$
$$T_2 = 1'',38\,,$$

e, come è facile vedere, due massimi o due minimi dell'ampiezza avrebbero dovuto succedersi, secondo questi dati, dopo l'intervallo:

$$T_2 \cdot \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 1'',38 \cdot \frac{1,38}{0,02}\,,$$
$$= 95'',22.$$

Invece fra due arresti successivi della massa m_1 (o della m_2) trascorrevano dodici secondi esattamente.

§ 3. **Proposta di una teoria.** — Ripensando a questo fatto mi soccorse alla mente l'idea che il fenomeno meccanico poteva essere simile a quello che si verifica, secondo il calcolo,

in un sistema di due conduttori elettrici percorsi da scariche oscillanti.

Si sa infatti che una coppia di conduttori, raccolta in uno spazio ristretto, ha uno spettro, nel quale non si soprappongono semplicemente gli spettri proprii dei componenti isolati (1).

In particolare se si prendono due circuiti ad una sola oscillazione, e si pongono uno accanto all'altro, lo spettro del sistema comprende due righe, un po' più discoste che non fossero quelle relative ai singoli conduttori.

Se lo stesso fatto si riproducesse nella coppia dei pendoli da me studiata nascerebbe dunque fra i due termini, dalla cui riunione è determinato lo spostamento di ciascuna massa, una differenza di periodi più grande di quella, che fornisce lo studio diretto dei pendoli isolati.

Ed essendo più grande la differenza del ritmo sarebbe in proporzione più rapido il battimento, appunto come le misure sembrano indicare.

Che se l'analogia si spinge più innanzi dobbiamo attendere ancora che si producano dei battimenti in un sistema di due pendoli rigorosamente uguali, come nell'elettromagnetismo si ottengono gli spettri a *doublets* con la semplice riunione di due conduttori della stessa forma e della stessa grandezza (2).

Così la coppia dei pendoli *rappresenterebbe* a sua volta una molecola composta. Offrendo in più il vantaggio di prestarsi con tutta facilità ad un controllo numerico delle conseguenze della teoria.

§ 4. **Calcolo della disposizione sperimentale.** — Cerchiamo dunque di calcolare il movimento che può assumere il sistema della fig. 1.

Sia l_1 la lunghezza, m_1 la massa del primo pendolo, l_2 la lunghezza e m_2 la massa del secondo pendolo.

Sia, al tempo t, M_1 (fig. 2) la posizione di m_1, M_2 la posi-

---

(1) A. Garbasso, *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce* (" Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino ", (2), LIII, 1903). Si confrontino in modo speciale i paragrafi 11 e 12.

(2) A. Garbasso, Memoria citata, paragrafo 14.

zione di m_2. Chiamiamo al solito g l'accelerazione dovuta alla gravità, e poniamo:

$$p_1 = m_1 g\,,$$
$$p_2 = m_2 g\,.$$

Sia C il punto di sospensione del primo pendolo, CV_1 la verticale passante per C, M_1V_2 la verticale passante per M_1; e si ponga ancora:

$$M_1\widehat{C}V_1 = \alpha_1\,,$$
$$M_2\widehat{M_1}V_2 = \alpha_2.$$

Finalmente sia M_1T_1 la tangente in M_1 alla traiettoria di m_1, contata nel senso in cui crescono gli angoli α_1, e M_2T_2 la tangente in M_2 alla traiettoria di m_2, contata nel senso in cui crescono gli angoli α_2.

Vogliamo calcolare anzitutto le forze che agiscono, secondo la traiettoria, su la massa m_1.

Un primo termine dipende dal peso p_1 ed ha l'espressione:

$$-p_1 \operatorname{sen}\alpha_1\,;$$

un secondo termine dipende dal peso p_2 e si esercita per l'intermezzo del filo M_1M_2. Per determinarne la grandezza si osservi che la componente di p_2 nella direzione M_1M_2 sarà:

$$p_2 \cos\alpha_2\,;$$

questa forza, che si può considerare applicata in M_1, dà secondo M_1T_1 la componente:

$$p_2 \cos\alpha_2 \,.\, \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)\,.$$

La forza complessiva cercata è dunque:

$$-p_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2 \,.\, \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)\,,$$

sicchè si può scrivere senz'altro:

$$(*) \qquad -p_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2 \,.\, \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) = m_1 l_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}\,.$$

A questo punto, se si vuol mettere la teoria presente in accordo con quella, che si suole dare per il pendolo semplice, bisognerà supporre che gli angoli α_1 e α_2 siano sempre tanto piccoli che le seconde potenze risultino già trascurabili rispetto alle prime.

In tale ipotesi verrà:

$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \alpha_1\,,$$
$$\cos\alpha_2 = 1\,,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) = \alpha_2 - \alpha_1\,;$$

sicchè la (*) prenderà la forma più semplice:

$$(a) \qquad -p_1\alpha_1 + p_2(\alpha_2 - \alpha_1) = m_1 l_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}.$$

Quanto al secondo pendolo la forza, che agisce sopra la sua massa, sarà semplicemente:

$$-p_2 \operatorname{sen}\alpha_2 = -p_2\alpha_2\,;$$

d'altra parte lo spostamento (al tempo t) è:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2\,,$$

risulta dunque:

$$(b) \qquad -p_2\alpha_2 = m_2 \frac{d^2}{dt^2}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2).$$

Riscriviamo le equazioni (a) e (b), ordinando i termini, e per semplificare poniamo, simbolicamente:

$$\frac{d^2}{dt^2} = D^2,$$

risulterà:

$$\left\{\begin{array}{l} -(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2)\,\alpha_1 + p_2\alpha_2 = 0, \\ m_2 l_1 D^2 \alpha_1 + (p_2 + m_2 l_2 D^2)\alpha_2 = 0. \end{array}\right.$$

Per eliminare α_1 o α_2 da queste equazioni basta applicare ad una qualunque di esse il determinante dei coefficienti.

Per generalità scriviamo α in luogo di α_1 e α_2, e avremo subito:

$$\begin{vmatrix} -(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2) & p_2 \\ m_2 l_1 D^2 & p_2 + m_2 l_2 D^2 \end{vmatrix} \alpha = 0.$$

Sviluppando risulta:

$$[(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2)(p_2 + m_2 l_2 D^2) + p_2 m_2 l_1 D^2]\,\alpha = 0,$$

ossia:

$$[g^2 m_2 (m_1 + m_2) + g m_2 (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) D^2 + m_1 m_2 l_1 l_2 D^4]\,\alpha = 0,$$

e ancora:

$$(1) \quad [g^2 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) D^2 + m_1 l_1 l_2 D^4]\,\alpha = 0,$$

o finalmente, posto:

$$\frac{m_2}{m_1} = c,$$

$$(1') \quad [g^2 (1 + c) + g(1 + c)(l_1 + l_2) D^2 + l_1 l_2 D^4]\,\alpha = 0.$$

Quest'ultima equazione è interessante perchè fa vedere che il fenomeno non dipende dai valori delle due masse m_1 e m_2, ma solamente dal loro rapporto (c).

Dalla (1') seguono per i periodi le espressioni:

$$(2) \quad \begin{aligned} T_1^* &= 2\pi \sqrt{\frac{2 l_1 l_2}{g(1+c)(l_1+l_2) - g\sqrt{(1+c)^2 (l_1+l_2)^2 - 4(1+c) l_1 l_2}}}, \\ T_2^* &= 2\pi \sqrt{\frac{2 l_1 l_2}{g(1+c)(l_1+l_2) + g\sqrt{(1+c)^2 (l_1+l_2)^2 - 4(1+c) l_1 l_2}}}. \end{aligned}$$

§ 5. **Caso particolare nel quale il rapporto $\frac{m_2}{m_1}$ tende a zero.** — Vogliamo esaminare adesso alcuni casi particolari. Se si suppone in primo luogo che la massa m_1 sia grandissima rispetto ad m_2, tanto grande che si possa scrivere

$$c = 0,$$

risulterà:

$$T_1^* = 2\pi \sqrt{\frac{2l_1l_2}{g(l_1+l_2) - g\sqrt{(l_1+l_2) - 4l_1l_2}}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{2l_1l_2}{g[l_1+l_2-(l_1-l_2)]}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}};$$

e similmente:

$$T_2^* = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

In altri termini, chiamando T_1 e T_2 i periodi relativi ai pendoli isolati, avremo subito:

$$T_1^* = T_1,$$

$$T_2^* = T_2.$$

E però ci troviamo nel caso classico delle oscillazioni impresse. I battimenti si possono quindi dedurre senz'altro dai periodi T_1 e T_2.

Se la c non è nulla, ma piccola, per modo che la seconda potenza sia trascurabile rispetto alla prima, verrà dalle (2):

$$T_1^* = 2\pi \sqrt{\frac{2l_1l_2}{g(1+c)(l_1+l_2) - g\sqrt{(1+2c)(l_1+l_2)^2 - 4(1+c)l_1l_2}}},$$

$$T_2^* = 2\pi \sqrt{\frac{2l_1l_2}{g(1+c)(l+l_2) + g\sqrt{(1+2c)(l_1+l_2)^2 - 4(1+c)l_1l_2}}}.$$

Supponendo inoltre finiti i rapporti:

$$\frac{l_1}{l_1-l_2} \quad \text{e} \quad \frac{l_2}{l_1-l_2}$$

e riducendo ulteriormente, si ottiene:

$$T_1^* = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \cdot \left[1 + \frac{cl_2}{2(l_1-l_2)}\right],$$

(2')

$$T_2^* = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} \cdot \left[1 - \frac{cl_1}{2(l_1-l_2)}\right].$$

Se è:

$$T_1 \gtrless T_2,$$

vale a dire:

$$l_1 \gtrless l_2,$$

risulta dunque:

$$T_1^* \gtrless T_1,$$

$$T_2^* \lessgtr T_2,$$

cioè il periodo più lungo viene allungato e il più corto scorciato.

E in ultima analisi i battimenti, che si producono nella realtà, devono essere più rapidi di quelli, che si potrebbero prevedere, calcolando in base ai periodi proprii dei pendoli isolati.

§ 6. **Caso di due pendoli uguali.** — Quando i due pendoli soprapposti fossero esattamente uguali, per le lunghezze e per le masse, seguirebbe dalle equazioni (2):

$$T_1^* = 2\pi \sqrt{\frac{2l^2}{4gl - g\sqrt{16l^2 - 8l^2}}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(2 - \sqrt{2})}}$$

$$= \frac{T}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}},$$

$$= 1{,}31\ T,$$

e:

$$T_2^* = \frac{T}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$(2'') \qquad = 0{,}54\ T.$$

La oscillazione della massa m_2 (o della m_1) è data dunque dalla somma di due termini con periodi, che stanno nel rapporto di *131* a *54*; qualunque valore abbiano poi le costanti l ed m.

§ 7. **Caso nel quale il rapporto $\frac{m_1}{m_2}$ tende a zero.** — Se ci riferiamo direttamente all'equazione (1) otteniamo subito:

$$[g + (l_1 + l_2)D^2]\,\alpha = 0.$$

È un risultato, che si poteva prevedere, anche senza calcoli; significa infatti che il sistema dovrà muoversi come se fosse un pendolo unico, con la lunghezza uguale alla somma delle lunghezze.

§ 8. **Risultati sperimentali.** — Per dare della teoria esposta nei paragrafi 4-7 una verifica sperimentale ho proceduto nel modo che segue.

Scelsi anzitutto due masse alquanto diverse (1) e le sospesi una dopo l'altra (separatamente), con due tratti di spago, ad uno stesso sostegno.

Determinai quindi i periodi T_1 e T_2, caratteristici dei pendoli isolati, dai quali periodi, con la formola semplice:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2},$$

dedussi le *lunghezze* l_1 ed l_2.

Introducendo poi codesti valori nelle espressioni (2), ne ricavai i periodi corretti T_1^* e T_2^*, e la durata del battimento:

$$T_2^* \cdot \frac{T_2^*}{T_1^* - T_2^*}.$$

La medesima durata si poteva del resto determinare direttamente, attaccando il secondo pendolo sotto al primo.

Con tale processo furono ottenuti i risultati, che ho raccolto nella tabellina:

---

(1) La prima di queste fu una sfera di rame, del peso di 3810 grammi, e la seconda una pallina di ottone di 41 grammi appena.

$$\frac{m_2}{m_1} = 0,011$$

T_1	T_1^*	T_2	T_2^*	Battimento osservato	Battimento calcolato
1'',40	1'',41	1'',08	1'',07	4'',6	3'',3
1'',40	1'',46	1'',38	1'',31	12'',0	11'',4
1'',40	1'',37	1'',64	1'',66	7'',1	6'',4

L'accordo fra la teoria e l'esperienza non è perfetto, ma si deve stimare senza dubbio sufficiente, se si bada alla semplicità delle ipotesi, che furono scelte come punto di partenza dei calcoli (1).

(1) Nella figura 3 sono segnati graficamente i risultati relativi alla terza coppia. Il diagramma è simile in tutto a quelli ottenuti (fra gli altri) dal Lecoq de Boisbaudran per gli spettri di uno stesso metallo isolato o combinato.

La nostra teoria considera i due pendoli come semplici; il trattarli come composti importerebbe naturalmente una maggiore difficoltà nei calcoli, ma nessuna complicazione analitica essenziale.

Sempre restando fermi nelle ipotesi adottate, si può facilmente tenere conto della circostanza che il secondo pendolo non è appeso nel centro di oscillazione del primo, ma dista da esso di un breve segmento a.

L'equazione (a) non si modifica punto; quanto alla (b) basta osservare che lo spostamento del secondo pendolo diviene:

$$(l_1 + a)\,\alpha_1 + l_2\alpha_2,$$

in luogo di:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2.$$

Siamo così condotti al sistema:

$$\begin{cases} -(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2)\,\alpha_1 + p_2\alpha_2 = 0, \\ m_2(l_1 + a)\,D^2\alpha_1 + (p_2 + m_2 l_2 D^2)\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

dal quale segue la nuova caratteristica:

$$\begin{vmatrix} -(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2) & p_2 \\ m_2(l_1 + a)D^2 & p_2 + m_2 l_2 D^2 \end{vmatrix} = 0,$$

Verifiche qualitative dei risultati teorici si possono avere in più modi.

Intanto dalle formole (2') si deduce che la differenza fra i periodi T_1 e T_1^*, T_2 e T_2^* deve essere piccola, a parità delle altre circostanze, quando le lunghezze proprie dei due pendoli risultino molto diverse. Ora, a proposito di una coppia determinata dai periodi:

$$T_1 = 1{,}40\,,$$
$$T_2 = 0{,}78\,,$$

trovo segnato nel mio libro d'esperienze: " Pare che i due pen- " doli oscillino ciascuno per suo conto, come l'altro non esi- " stesse ". In realtà, eseguendo i calcoli si trova:

$$\frac{m_2}{m_1} = 0{,}011$$

T_1	T_1^*	T_2	T_2^*
1,40	1,40	0,78	0,78

Dalle formole (2') segue pure che lo scostamento prodotto nei periodi dall'azione mutua di due pendoli diminuisce col rap-

---

vale a dire:

$$g^2(1+c) + g[(1+c)(l_1+l_2) + ac]D^2 + l_1 l_2 D^4 = 0.$$

E ancora, se c è piccolo:

$$T_1^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{2l_1l_2}{g[(1+c)(l_1+l_2)+ac] - g\sqrt{(l_1+l_2)^2(1+2c)+2(l_1+l_2)ac-4l_1l_2(1+c)}}}\,,$$

$$T_2^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{2l_1l_2}{g[(1+c)(l_1+l_2)+ac] + g\sqrt{(l_1+l_2)^2(1+2c)+2(l_1+l_2)ac-4l_1l_2(1+c)}}}\,.$$

Nei casi pratici queste formole e quelle del paragrafo quinto dànno dei valori assai poco differenti. E però nel testo non si è tenuto conto della correzione di cui si tratta, essendo molto più comode e più adatte ai calcoli numerici le formole ricavate innanzi.

porto c. E studiando un sistema costituito dal primo pendolo solito ($m_1 = 3810$) e da un secondo col periodo di $1'',38$ e la pallina di sughero, leggerissima, trovai infatti il battimento di 33 invece che di 12 secondi.

Di particolare interesse è il caso definito dalle uguaglianze:

$$l_1 = l_2\,,$$

$$m_1 = m_2\,,$$

da noi studiato nel paragrafo sesto.

Componendo due sinussoidi, i cui periodi stiano nel rapporto di 131 a 54 (1) (fig. $4a$) si ottiene la curva della fig. $4b$. Questa figura è fatta nell'ipotesi che le ampiezze dei due moti parziali risultino identiche, e la condizione si verifica difficilmente nella realtà. Ad ogni modo i risultati sono quelli, che siamo in diritto di aspettarci: oscillazioni rapide e lente si alternano, e ciascuna delle masse m_1 e m_2, arrivata alla posizione di equilibrio, subisce come un arresto.

Genova, Istituto fisico della R. Università.
Marzo 1904.

---

(1) Si confrontino le formole (2'').

Lit. Salussolia, Torino